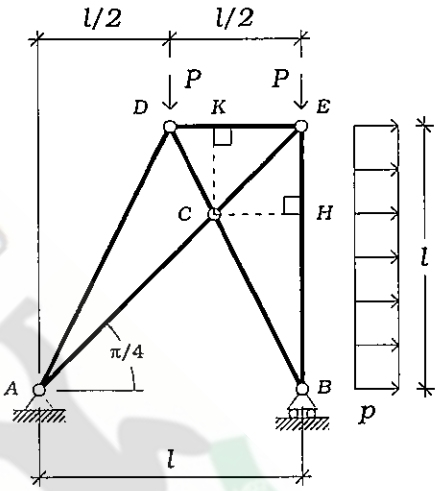
Università di Pisa
Esame di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI I
Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e in Ingegneria Nucleare
(docente: Prof. Stefano Bennati)

Prova scritta del 17 gennaio 2007

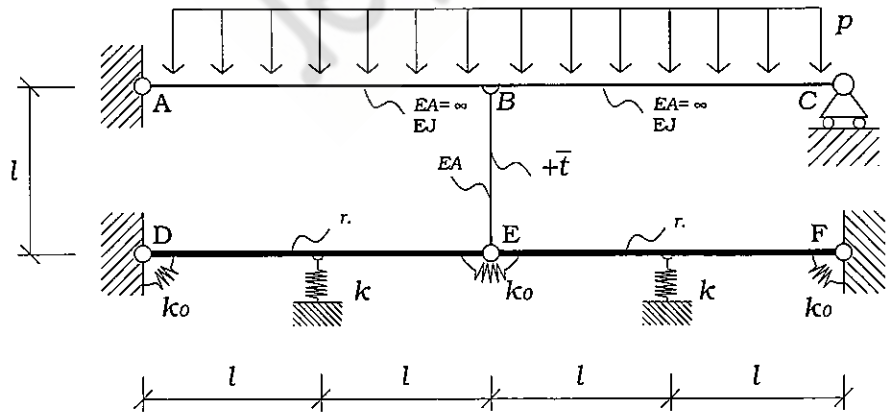
Problema 1

1) Eliminando l'asta *DE*, la struttura rappresentata in figura si trasforma in un meccanismo: determinare, in questo caso, lo spostamento rigido infinitesimo compatibile con ogni vincolo presente e disegnarlo con cura (assumere come parametro la rotazione θ_1 dell'asta *AC*) [6].
2) Utilizzando il teorema dei lavori virtuali, determinare, nel caso precedente, il valore del carico distribuito *p* compatibile con l'equilibrio [5].
3) Per il valore di *p* così calcolato, determinare le reazioni vincolari nei nodi *A* e *B* [3].



Problema 2

1) Nella soluzione del sistema di figura è possibile, al fine di determinare lo stato di sollecitazione interno al sottosistema ABCE, sostituire alla parte DEF un appoggio elastico verticale di opportuna rigidezza k_{eq}. Determinare il valore di tale rigidezza estraendo la sottostruttura DEF e facendo uso del teorema dei lavori virtuali [6].
2) Utilizzando il valore precedentemente calcolato di k_{eq}, risolvere la struttura ABCE assumendo come incognita iperstatica la reazione verticale dell'appoggio elastico in E. Successivamente tracciare il diagramma del momento flettente nel tratto ABC. Nella risoluzione assumere $k = EJ/4l^3$, $EA/l = k$ e $k_0 = 3kl^2$ [10].



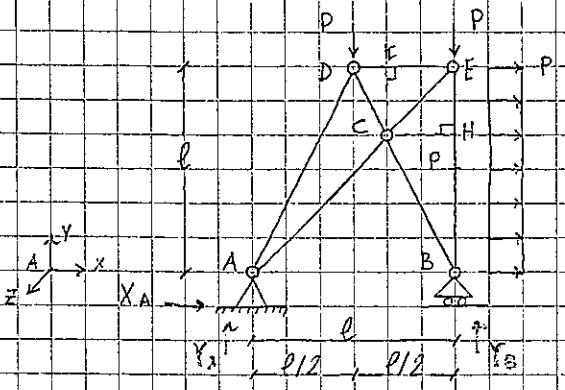
MASTER COPY
PISA

[Avvertenze: scrivere su ogni foglio protocollo il proprio nome e cognome e, sul primo foglio, anche la data della prova; consegnare tutti i fogli della minuta e il testo della prova.]

Studente _____ *(matr.:* _____*)*


master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

PROVA SCRITTA DEL 17 GENNAIO 2007



$$\frac{CH}{BH} = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2} \Rightarrow CH = \frac{BH}{2} \qquad (CH = HE)$$

$$BE = l = BH + HE = BH + CH = BH + \frac{BH}{2} = \frac{3}{2} BH$$

$$BH = \frac{2}{3} l \qquad CH = \frac{l}{3}$$

Problema 1.1

Tolta l'asta DE il sistema ha $3 \times 6 = 18$ gradi di libertà

A	4	D	2
B	3	E	2
C	$2(h-1) = 6$	tot.	17

I vincoli presenti tolgono in totale 17 g.d.l. e quindi la struttura risulta labile

A $\quad \vec{v}_A = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$

B $\quad \vec{v}_B = v_B\,\vec{i} + 0\,\vec{j}$

$C^1 \quad \vec{v}_C^{\,1} = \vec{v}_A + \vec{\theta}_1 \wedge (C - A) = (\theta_1 \vec{k}) \wedge \left(\frac{2}{3} l \vec{i} + \frac{2}{3} l \vec{j}\right) = -\frac{2}{3} l \theta_1 \vec{i} + \frac{2}{3} l \theta_1 \vec{j}$

$C^2 \quad \vec{v}_C^{\,2} = \vec{v}_B + \vec{\theta}_2 \wedge (C - B) = (v_B \vec{i}) + (\theta_2 \vec{k}) \wedge \left(-\frac{l}{3}\vec{i} + \frac{2}{3} l \vec{j}\right) =$

$$= (v_B \vec{i}) + \left(-\frac{2}{3} l \theta_2 \vec{i} - \frac{l}{3} \theta_2 \vec{j}\right) = \left[(v_B - \frac{2}{3} l \theta_2)\vec{i} - \frac{l}{3} \theta_2 \vec{j}\right]$$

$$\vec{v}_C^{\,1} = \vec{v}_C^{\,2} \qquad \begin{cases} -\frac{2}{3} l \theta_1 = v_B - \frac{2}{3} l \theta_2 \\ \frac{2}{3} l \theta_1 = +\frac{l}{3} \theta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_B = -2 l \theta_1 \\ \theta_2 = -2 \theta_1 \end{cases}$$

Problema 1.2

Per l'equilibrio deve essere

$$SL = \vec{P} \cdot \vec{v}_D + \vec{P} \cdot \vec{v}_E + \vec{P}_{RIS} \cdot \vec{v}_P = 0 \qquad \forall\, \theta_1$$

D $\quad \vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\theta}_1 \wedge (D - A) = (\theta_1 \vec{k}) \wedge \left(\frac{l}{2}\vec{i} + l\vec{j}\right) = \left(-l\theta_1 \vec{i} + \frac{l}{2}\theta_1 \vec{j}\right)$

E $\quad \vec{v}_E = \vec{v}_B + \vec{\theta}_2 \wedge (E - B) = (v_B \vec{i}) + (\theta_2 \vec{k}) \wedge (0\vec{i} + l\vec{j}) = (v_B \vec{i}) + (-l\theta_2 \vec{i}) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

P $\quad \vec{v}_P = \vec{v}_B + \vec{\theta}_2 \wedge (P - B) = (v_B \vec{i}) + (\theta_2 \vec{k}) \wedge (0\vec{i} + \frac{l}{2}\vec{j}) = (v_B \vec{i}) + (-\frac{l}{2}\theta_2 \vec{i}) = -l\theta_1 \vec{i} + 0\vec{j}$

$$\delta L = (-P\vec{j})\cdot\left(-l\theta_1\vec{i} + \frac{l}{2}\theta_1\vec{j}\right) + (+pl\vec{i})\cdot\left(-l\theta_1\vec{i} + 0\vec{j}\right) =$$

$$= -\frac{Pl}{2}\theta_1 - pl^2\theta_1 = -l\theta_1\left(\frac{P}{2} + pl\right) = 0$$

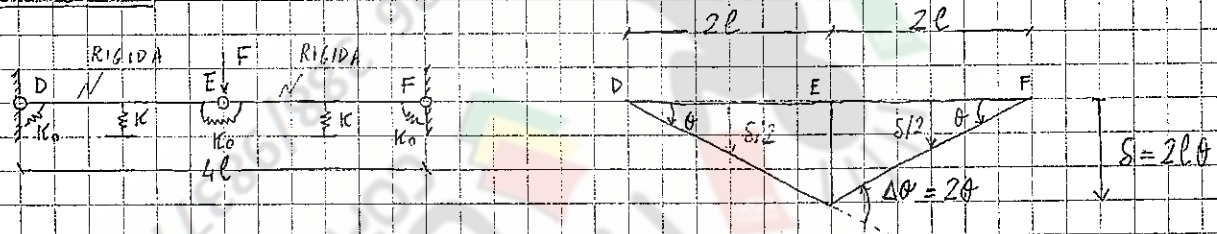
Quindi $\frac{P}{2} + pl = 0 \Rightarrow \boxed{p = -\frac{P}{2l}}$

Problema 1.3

$$\begin{cases} X_A + pl = 0 \\ Y_A + Y_B - 2P = 0 \\ Y_B l - \frac{pl}{2} - Pl - \frac{pl^2}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_A = -pl = \frac{P}{2} \\ Y_A = \frac{5}{4}P \\ Y_B = \frac{3}{4}P \end{cases}$$

dove $p = -\frac{P}{2l}$

Problema 2.1



Poiché la trave BE è reticolare, in E, sulla trave DEF, agisce una forza F verticale (cioè lo sforzo normale che è presente in BE). La forza F ha valore $F = K_{eq}\delta$

$$\delta L = \vec{F}\cdot\vec{\delta} + 2\left(-K_0\theta\right)\cdot\vec{\theta} + 2\left(-K\frac{\vec{\delta}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{\delta}}{2}\right) + \left(-K_0\Delta\vec{\theta}\right)\cdot\Delta\vec{\theta} = 0 \quad \forall\theta$$

↳ per l'equilibrio

$$(K_{eq}\,2l\vec{\theta})\cdot(2l\vec{\theta}) - 2K_0\vec{\theta}\cdot\vec{\theta} - 2Kl\vec{\theta}\cdot l\vec{\theta} - K_0(2\vec{\theta})\cdot(2\vec{\theta}) = 0 \quad \forall\theta$$

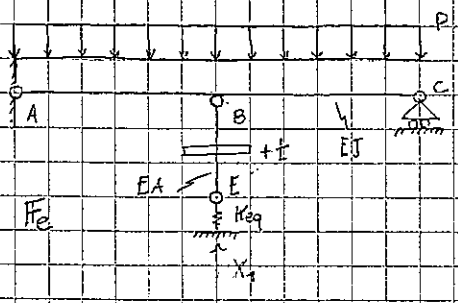
$$4K_{eq}l^2\theta^2 - 2K_0\theta^2 - 2Kl^2\theta^2 - 4K_0\theta^2 = 0 \quad \forall\theta$$

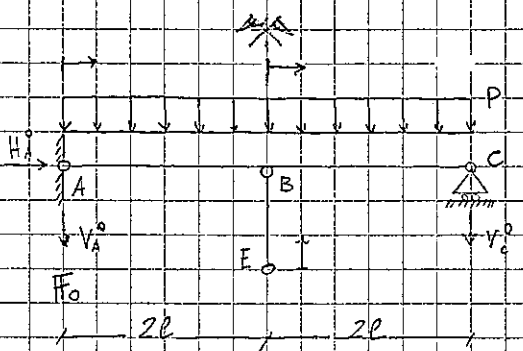
$$2\theta^2(2K_{eq}l^2 - K_0 - Kl^2 - 2K_0) = 0$$

$$2\theta^2(2K_{eq}l^2 - 3K_0 - Kl^2) = 0 \quad \Rightarrow K_{eq} = \frac{(3K_0 + Kl^2)}{2l^2} = \frac{(3Kl^2 + Kl^2)}{2l^2} = 5K$$

La rigidezza della molla equivalente vale $K_{eq} = 5K$

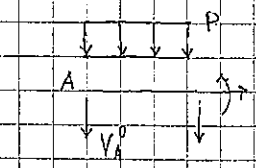
Problema 2.2.





Sistema F_0

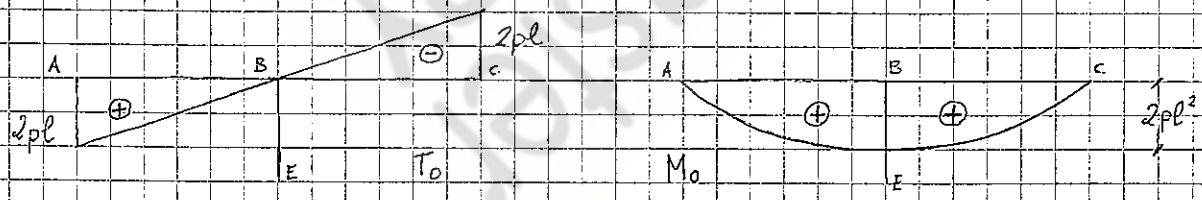
$$\begin{cases} H_A^0 = 0 \\ V_A^0 + V_C^0 + p4l = 0 \\ -V_C^0 4l - (p4l)(2l) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_A^0 = 0 \\ V_A^0 = -2pl \\ V_C^0 = -2pl \end{cases}$$



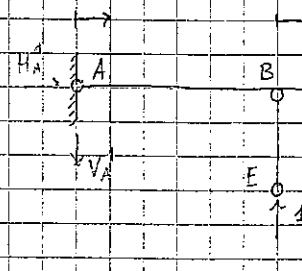
$N_{AB}^0 = 0 \qquad T_{AB}^0 = 2pl - ps \qquad M_{AB}^0 = 2pls - \frac{ps^2}{2}$

Per simmetria $N_{BC}^0 = 0 \qquad T_{BC}^0 = -ps \qquad M_{BC}^0 = 2pl^2 - \frac{ps^2}{2}$

L'asta EB è scarica



Sistema F_1



$$\begin{cases} H_A^1 = 0 \\ V_A^1 + V_C^1 - 1 = 0 \\ 2l - V_C^1(4l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A^1 = 0 \\ V_A^1 = \frac{1}{2} \\ V_C^1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$N_{AB}^1 = 0 \qquad T_{AB}^1 = -\frac{1}{2} \qquad M_{AB}^1 = -\frac{s}{2} \qquad N_{EB}^1 = -1 \qquad T_{EB}^1 = 0 \qquad M_{EB}^1 = 0$

$N_{BC}^1 = 0 \qquad T_{BC}^1 = \frac{1}{2} \qquad M_{BC}^1 = \frac{s}{2} - l$